**第一讲导数的概念及运算**

id:2147490950;FounderCES

题组1导数的几何意义

1*.*[2014新课标全国Ⅱ,8,5分][理]设曲线*y=ax-*ln(*x+*1)在点(0,0)处的切线方程为*y=*2*x*,则*a=*()

A.0 B.1 C.2 D.3

2*.*[2014陕西,10,5分][理]如图3*-*1*-*1,某飞行器在4千米高空水平飞行,从距着陆点*A*的水平距离10千米处开始下降,已知下降飞行轨迹为某三次函数图象的一部分,则该函数的解析式为()

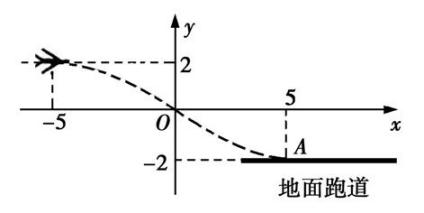


图3*-*1*-*1

A*.y=x*3*-x* B*.y=x*3*-x* C*.y=x*3*-x* D*.y=-x*3*+x*

3*.*[2016全国卷Ⅲ,15,5分][理]已知*f*(*x*)为偶函数,当*x<*0时,*f*(*x*)*=*ln(*-x*)*+*3*x*,则曲线*y=f*(*x*)在点(1,*-*3)处的切线方程是*.*

4*.*[2015新课标全国Ⅰ,14,5分]已知函数*f*(*x*)*=ax*3*+x+*1的图象在点(1,*f*(1))处的切线过点(2,7),则*a=　　　.*

5*.*[2015陕西,15,5分][理]设曲线*y=*e*x*在点(0,1)处的切线与曲线*y=*(*x>*0)上点*P*处的切线垂直,则*P*的坐标为*.*

6*.*[2016全国卷Ⅱ,20,12分]已知函数*f*(*x*)*=*(*x+*1)ln *x-a*(*x-*1)*.*

(Ⅰ)当*a=*4时,求曲线*y=f*(*x*)在(1,*f*(1))处的切线方程;

(Ⅱ)若当*x*∈(1,*+∞*)时,*f*(*x*)*>*0,求*a*的取值范围*.*

7*.*[2014新课标全国*Ⅰ*,21,12分][理]设函数*f*(*x*)*=a*e*x*ln *x+*,曲线*y=f*(*x*)在点(1, *f*(1))处的切线方程为*y=*e(*x-*1)*+*2*.*

(Ⅰ)求*a*,*b*;

(Ⅱ)证明:*f*(*x*)*>*1*.*

题组2导数的运算

8.[2015天津,11,5分]已知函数*f*(*x*)*=ax*ln *x*,*x*∈(0,*+∞*),其中*a*为实数,*f* *'*(*x*)为*f*(*x*)的导函数*.*若

*f* *'*(1)*=*3,则*a*的值为*.*

9*.*[2017 浙江,20,15分]已知函数*f*(*x*)*=*(*x-*)e*-x*(*x*≥)*.*

(Ⅰ)求*f*(*x*)的导函数;

(Ⅱ)求*f*(*x*)在区间[,*+∞*)上的取值范围*.*

id:2147490978;FounderCES

**A组基础题**

1*.* [2017河南南阳期中,5]若曲线*f*(*x*)*=x*sin *x+*1在点(,*+*1)处的切线与直线*ax-*2*y+*1*=*0互相垂直,则实数*a=*()

A.-2 B.2 C.1 D.-1

2*.*[2017临川三模,4]已知函数*f*(*x*)*=*sin *x-*cos *x*,且*f* *'*(*x*)*=f*(*x*),则tan 2*x*的值是()

A.- B.- C. D.

3*.*[2017成都市高三二诊,5]若曲线*y=f*(*x*)*=*ln *x+ax*2(*a*为常数)不存在斜率为负数的切线,则实数*a*的取值范围是()

A.(*-*,*+∞*) B.[*-*,*+∞*) C.(0,*+∞*) D.[0,*+∞*)

4*.*[2017广州市高三综合测试,9]设函数*f*(*x*)*=x*3*+ax*2,若曲线*y=f*(*x*)在点*P*(*x*0,*f*(*x*0))处的切线方程为*x+y=*0,则点*P*的坐标为()

A.(0,0) B.(1,-1) C.(-1,1) D.(1,*-*1)或(*-*1,1)

5*.*[2017辽宁省沈阳市高三教学质量监测,16]设函数*f*(*x*)*=g*()*+x*2,曲线*y=g*(*x*)在点(1,*g*(1))处的切线方程为9*x+y-*1*=*0,则曲线*y=f*(*x*)在点(2,*f*(2))处的切线方程为*.*

6*.*[2017云南省高三统一检测,13]已知函数*f*(*x*)*=ax*ln *x+b*(*a*,*b*∈R),若*f*(*x*)的图象在*x=*1处的切线方程为2*x-y=*0,则*a+b=　　　　.*

**B组提升题**

7*.*[2018广东七校第一次联考,12]已知函数*f*(*x*)*=x*2的图象在点(*x*0,)处的切线为*l*,若*l*也与函数*y=*ln *x*,*x*∈(0,1)的图象相切,则*x*0必满足()

A*.*0*<x*0*<* B*.<x*0*<*1 C*.<x*0*<* D*.<x*0*<*

8*.*[2017湖北孝感统考,8]若曲线*y=*ln(*x+a*)的一条切线为*y=*e*x+b*,其中*a*,*b*为正实数,则*a+*的取值范围是()

A.(*+*,*+∞*) B.[e,*+∞*) C.[2,*+∞*) D.[2,e)

9*.*[2018山西八校第一次联考,21]已知函数*f*(*x*)*=x-*1*-a*ln *x*(*a*∈R),*g*(*x*)*=.*

(1)当*a=-*2时,求曲线*y=f*(*x*)在*x=*1处的切线方程;

(2)若*a<*0,且对任意*x*1,*x*2∈(0,1],都有*|f*(*x*1)*-f*(*x*2)*|<*4*×|g*(*x*1)*-g*(*x*2)*|*,求实数*a*的取值范围*.*

10*.*[2017长沙市五月模拟,21] 已知*f*(*x*)*=ax*3*-x*2*-x+b*(*a*,*b*∈R,*a*≠0),*g*(*x*)*=*e*x*(e是自然对数的底数),*f*(*x*)的图象在*x=-*处的切线方程为*y=x+.*

(1)求*a*,*b*的值;

(2)探究:直线*y=x+*是否可以与函数*g*(*x*)的图象相切?若可以,写出切点的坐标;否则,说明理由*.*

**答案**

id:2147497103;FounderCES

1*.*D*y'=a-*,由题意得*y'|x=*0*=*2,即*a-*1*=*2,所以*a=*3*.*

2*.*A设所求函数解析式为*y=f*(*x*),由题意知*f*(5)*=-*2,*f*(*-*5)*=*2,且*f* *'*(*±*5)*=*0,代入验证易得*y=x*3*-x*符合题意,故选A*.*

3*.y=-*2*x-*1由题意可得当*x>*0时,*f*(*x*)*=*ln *x-*3*x*,则*f* *'*(*x*)*=-*3,*f* *'*(1)*=-*2,则在点(1,*-*3)处的切线方程为*y+*3*=-*2(*x-*1),即*y=-*2*x-*1*.*

4*.*1因为*f*(*x*)*=ax*3*+x+*1,所以*f* *'*(*x*)*=*3*ax*2*+*1,所以*f*(*x*)在点(1,*f*(1))处的切线斜率为*k=*3*a+*1,又*f*(1)*=a+*2,所以切线方程为*y-*(*a+*2)*=*(3*a+*1)(*x-*1),因为点(2,7)在切线上,所以7*-*(*a+*2)*=*3*a+*1,解得*a=*1*.*

5*.*(1,1)*y'=*e*x*,则*y=*e*x*在点(0,1)处的切线的斜率*k=*1,又曲线*y=*(*x>*0)上点*P*处的切线与*y=*e*x*在点(0,1)处的切线垂直,所以*y=*(*x>*0)在点*P*处的切线的斜率为*-*1,设*P*(*a*,*b*),则曲线*y=*(*x>*0)上点*P*处的切线的斜率为*=-a-*2*=-*1,可得*a=*1,又*P*(*a*,*b*)在*y=*上,所以*b=*1,故*P*(1,1)*.*

6*.*(Ⅰ)*f*(*x*)的定义域为(0,*+∞*)*.*当*a=*4时,

*f*(*x*)*=*(*x+*1)ln *x-*4(*x-*1),*f* *'*(*x*)*=*ln *x+-*3,*f* *'*(1)*=-*2,*f*(1)*=*0*.*

故曲线*y=f*(*x*)在(1,*f*(1))处的切线方程为2*x+y-*2*=*0*.*

(Ⅱ)当*x*∈(1,*+∞*)时,*f*(*x*)*>*0等价于ln *x->*0*.*

设*g*(*x*)*=*ln *x-*,则

*g'*(*x*)*=-=*,*g*(1)*=*0*.*

(i)当*a*≤2,*x*∈(1,*+∞*)时,*x*2*+*2(1*-a*)*x+*1≥*x*2*-*2*x+*1*>*0,故*g'*(*x*)*>*0,*g*(*x*)在(1,*+∞*)上单调递增,因此*g*(*x*)*>*0;

(ii)当*a>*2时,令*g'*(*x*)*=*0得

*x*1*=a-*1*-*,*x*2*=a-*1*+.*

由*x*2*>*1和*x*1*x*2*=*1得*x*1*<*1,故当*x*∈(1,*x*2)时,*g'*(*x*)*<*0,*g*(*x*)在(1,*x*2)上单调递减,此时*g*(*x*)*<g*(1)*=*0*.*

综上,*a*的取值范围是(*-∞*,2]*.*

7*.*(Ⅰ)函数*f*(*x*)的定义域为(0,*+∞*),

*f* *'*(*x*)*=a*e*x*ln *x+*e*x-*e*x-*1*+*e*x-*1*.*

由题意可得*f*(1)*=*2, *f* *'*(1)*=*e*.*

故*a=*1,*b=*2*.*

(Ⅱ)由(*Ⅰ*)知, *f*(*x*)*=*e*x* ln *x+*e*x-*1,

从而*f*(*x*)*>*1等价于*x*ln *x>x*e*-x-.*

设函数*g*(*x*)*=x*ln *x*,则*g'*(*x*)*=*1*+*ln *x.*

所以当*x*∈(0,)时,*g'*(*x*)*<*0;

当*x*∈(,*+∞*)时,*g'*(*x*)*>*0*.*

故*g*(*x*)在(0,)上单调递减,在(*+∞*)上单调递增,

从而*g*(*x*)在(0,*+∞*)上的最小值为*g*()*=-.*

设函数*h*(*x*)*=x*e*-x-*,则*h'*(*x*)*=*e*-x*(1*-x*)*.*

所以当*x*∈(0,1)时,*h'*(*x*)*>*0; 当*x*∈(1,*+∞*)时,*h'*(*x*)*<*0*.*

故*h*(*x*)在(0,1)上单调递增,在(1,*+∞*)上单调递减,

从而*h*(*x*)在(0,*+∞*)上的最大值为*h*(1)*=-.*

综上,当*x>*0时,*g*(*x*)*>h*(*x*),即*f*(*x*)*>*1*.*

8*.*3*f* *'*(*x*)*=a*(ln *x+x*·)*=a*(ln *x+*1),因为*f* *'*(1)*=*3,所以*f* *'*(1)*=a=*3*.*

9*.*(Ⅰ)因为(*x-*)*'=*1*-*,(e*-x*)*'=-*e*-x*,

所以*f'*(*x*)*=*(1*-*)e*-x-*(*x-*)e*-x=*(*x>*)*.*

(Ⅱ)由*f'*(*x*)*==*0,

解得*x=*1或*x=.*

因为

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  | (,1) | 1 | (1,) |  | (,*+∞*) |
| *f'*(*x*) |  | *-* | 0 | *+* | 0 | *-* |
| *f*(*x*) |  | ↘ | 0 | ↗ |  | ↘ |

又*f*(*x*)*=*(*-*1)2e*-x*≥0,

所以*f*(*x*)在区间[,*+∞*)上的取值范围是[0,]*.*

id:2147497118;FounderCES

**A组基础题**

1*.*A因为*f*(*x*)*=x*sin *x+*1,所以*f* *'*(*x*)*=*sin *x+x*cos *x*,

所以*f* *'*()*=*sin*+*cos*=*1*.*

因为直线*ax-*2*y+*1*=*0的斜率为,

所以*f* *'*()*×=-*1,解得*a=-*2,故选A*.*

2*.*D因为*f* *'*(*x*)*=*cos *x+*sin *x=*sin *x-*cos *x*,所以tan *x=-*3,所以tan 2*x===*,故选D*.*

3*.*D*f'*(*x*)*=+*2*ax=*(*x>*0),根据题意有*f'*(*x*)≥0(*x>*0)恒成立,所以2*ax*2*+*1≥0(*x>*0)恒成立,即2*a*≥*-*(*x>*0)恒成立,所以*a*≥0,故实数*a*的取值范围为[0,*+∞*)*.*故选D*.*

4*.*D由题意知,*f* *'*(*x*)*=*3*x*2*+*2*ax*,所以曲线*y=f*(*x*)在点*P*(*x*0,*f*(*x*0))处的切线的斜率为

*f* *'*(*x*0)*=*3*+*2*ax*0,又切线方程为*x+y=*0,所以*x*0≠0,且解得*a=±*2,*x*0*=-.*所以当时,点*P*的坐标为(1,*-*1);当时,点*P*的坐标为(*-*1,1),故选D*.*

5*.x+*2*y+*6*=*0由已知得*g'*(1)*=-*9,*g*(1)*=-*8,

又*f* *'*(*x*)*=g'*()*+*2*x*,

∴*f* *'*(2)*=g'*(1)*+*4*=-+*4*=-*,*f*(2)*=g*(1)*+*4*=-*4,

∴所求切线方程为*y+*4*=-*(*x-*2),即*x+*2*y+*6*=*0*.*

6*.*4由题意,得*f* *'*(*x*)*=a*ln *x+a*,所以*f* *'*(1)*=a*,因为函数*f*(*x*)的图象在*x=*1处的切线方程为2*x-y=*0,所以*a=*2,又*f*(1)*=b*,则2*×*1*-b=*0,所以*b=*2,故*a+b=*4*.*

**B组提升题**

7.D由题意,得*f* *'*(*x*)*=*2*x*,所以*f* *'*(*x*0)*=*2*x*0,*f*(*x*0)*=*,所以切线*l*的方程为*y=*2*x*0(*x-x*0)*+=*2*x*0*x-.*因为*l*也与函数*y=*ln *x*(0*<x<*1)的图象相切,设切点坐标为(*x*1,ln *x*1),易知*y'=*,所以切线*l*的方程为*y=x+*ln *x*1*-*1,则又0*<x*1*<*1,所以*x*0*>*1,所以1*+*ln 2*x*0*=*,*x*0∈(1,*+∞*)*.*令*g*(*x*)*=x*2*-*ln 2*x-*1,*x*∈(1,*+∞*),则*g* *'*(*x*)*=*2*x-=>*0,所以*g*(*x*)在(1,*+∞*)上单调递增,又*g*(1)*=*

*-*ln 2*<*0,*g*()*=*1*-*ln 2*<*0,*g*()*=*2*-*ln 2*>*0,所以存在*x*0∈(,),使得*g*(*x*0)*=*0,故*<x*0*<*,选D*.*

8*.*C因为*y=*ln(*x+a*),所以*y'=.*

设切点为(*x*0,*y*0),则有 所以*b=a*e*-*2*.*

因为*b>*0,所以*a>*,

所以*a+=a+=a+*≥2(当且仅当*a=*1时取等号),

所以*a+*的取值范围是[2,*+∞*),故选C*.*

9*.*(1)当*a=-*2时,*f*(*x*)*=x-*1*+*2ln *x*,

*f* *'*(*x*)*=*1*+*,*f*(1)*=*0,切线的斜率*k=f* *'*(1)*=*3,

故曲线*y=f*(*x*)在*x=*1处的切线方程为3*x-y-*3*=*0*.*

(2)对*x*∈(0,1],当*a<*0时,*f* *'*(*x*)*=*1*->*0,∴*f*(*x*)在(0,1]上单调递增,易知*g*(*x*)*=*在(0,1]上单调递减,

不妨设*x*1,*x*2∈(0,1],且*x*1*<x*2,*f*(*x*1)*<f*(*x*2),*g*(*x*1)*>g*(*x*2),

∴*f*(*x*2)*-f*(*x*1)*<*4*×*[*g*(*x*1)*-g*(*x*2)],即*f*(*x*1)*+>f*(*x*2)*+.*

令*h*(*x*)*=f*(*x*)*+*,则当*x*1*<x*2时,有*h*(*x*1)*>h*(*x*2),∴*h*(*x*)在(0,1]上单调递减,

∴*h'*(*x*)*=*1*--=*≤0在(0,1]上恒成立,

∴*x*2*-ax-*4≤0在(0,1]上恒成立,等价于*a*≥*x-*在(0,1]上恒成立,∴只需*a*≥(*x-*)max*.*

∵*y=x-*在(0,1]上单调递增,∴*y*max*=-*3,∴*-*3≤*a<*0,

故实数*a*的取值范围为[*-*3,0)*.*

10*.*(1)因为*f*(*x*)*=ax*3*-x*2*-x+b*,所以*f* *'*(*x*)*=*3*ax*2*-*2*x-*1,

因为*f*(*x*)*=ax*3*-x*2*-x+b*的图象在*x=-*处的切线方程是*y=x+*,

所以*f* *'*(*-*)*=*,即3*a×*(*-*)2*-*2*×*(*-*)*-*1*=*,解得*a=*1*.*

因为*f*(*x*)的图象过点(*-*,),所以(*-*)3*-*(*-*)2*-*(*-*)*+b=*,解得*b=.*

综上,*a=*1,*b=.*

(2)设直线*y=x+*与函数*g*(*x*)的图象相切,切点为点*B*(*x*0,*y*0),

因为*g'*(*x*)*=*e*x*,所以过点*B*的切线的斜率是*g'*(*x*0)*=.*

又直线*y=x+*的斜率是,所以*=*,解得*x*0*=-.*

将*x*0*=-*代入*y=*e*x*得点*B*的坐标为(*-*,),

所以直线*y=x+*可以与函数*g*(*x*)的图象相切,切点坐标为(*-*,)*.*